بسمه تعالی

دانشکده علوم و فنآوریهای پزشکی
واحد علوم و تحقیقات

تمرین سری دوم درس BSP

۱- X(t) یک فرآیند wss است، نشان دهید که اگر Y(t)=X(t+a)-X(t-a) آنگاه:

أ- $R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a)$

ب- $G_Y(f) = 4G_X(f)sin^2(a\omega)$

۲- با فرض $G_X(f) = \frac{1}{(4+\omega^2)^2}$ تابع خود همبستگی $R_X(\tau)$ را بیابید.

۳- روابط زیر را اثبات کنید:

أ- $\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} g(i-j) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1}(N-|k|)g(k)$

ب- $\sum_{i=-M}^{M}\sum_{j=-M}^{M} g(i-j) = \sum_{k=-2M}^{2M}(2M+1-|k|)g(k)$

۴- اگر فرآیند تصادفی X(t) دارای چگالی طیف توان $G_X(f) = \left|1+e^{-j2\pi f}+\frac{1}{2}e^{-j4\pi f}\right|^2$ باشد تابع خود همبستگی $R_X(\tau)$ را بدست آورید.

۵- ثابت کنید که فرآیندهای تعریف شده$X_1(n)$ و $X_2(n)$ که U(n) نویز گوسی سفید با σ^2 است دارای یک تابع چگالی طیف توان مشابه هستند.

$$\begin{cases} X_1(n) = \frac{1}{2}U(n+1) + \frac{1}{2}U(n-1) \\ X_2(n) = \frac{1}{2}U(n) + \frac{1}{2}U(n-2) \end{cases}$$

۶- فرآیند Y(t) یک انتگرال زمان کوتاه فرآیند X(t) است یعنی $Y(t) = \int_{t-T}^{t} X(u)du$ حال

أ- پاسخ ضربه و تابع تبدیل سیستم توصیفی را بدست آورید.

ب-طیف توان Y(t) را برحسب X(t) محاسبه کنید.

ت- اگر $R_X(\tau) = \begin{cases} 1-\left|\frac{\tau}{T}\right| & |\tau| \le T \\ 0 & otherwise \end{cases}$ آنگاه مطلوبست: $G_Y(f)$، $R_Y(\tau)$ و $E\{Y(t)^2\}$.

۷- در بسیاری از کاربردها لازم است که یک تخمین موثر برای تابع خود همبستگی یک فرآیند تصادفی با طول محدود محاسبه شود. بدین منظور تخمین زیر ارایه می‌شود (N طول سیگنال x(n) است):

$$\hat{R}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m)$$

هدف از تمرین بررسی تخمین فوق برای فرآیند نویز سفید است.

أ- یک نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس برابر ۲ و طول N=1000 تولید و رسم شود. N به عنوان ورودی برنامه از کاربر پرسیده شود.

ب-به ازای تاخیرهای $0 \leqslant m \leqslant 99$ تابع خود همبستگی $\hat{R}(m) = \frac{1}{1000}\sum_{n=0}^{999} x(n)x(n-m)$ محاسبه و رسم شود. آیا تخمین حاصله به مقدار حقیقی $R(m) = \delta(m)$ نزدیک است؟

ت-نویز سفید فوق را به ۱۰ قطعه ۱۰۰ نمونه‌ای تقسیم کرده و مجدد تابع خود همبستگی را بر اساس میانگین قطعات بدست آورید یعنی:

$$\hat{R}(m) = \frac{1}{1000}\sum_{k=0}^{9}\sum_{n=0}^{99} x(n+100k)x(n-m+100k) \qquad m = 0,\ldots,99$$

ث-اگر تعداد نمونه‌های نویز سفید را به ۱۰۰۰۰ افزایش دهیم تخمین مراحل (ب) و (ت) را تکرار و بدست آورید. با مقایسه نتایج درباره تاثیر طول N بر تخمین بحث کنید.